

IE-0405 MODELOS PROBABILÍSTICOS DE SEÑALES Y SISTEMAS Examen Parcial 1

I semestre 2015

Peter De Ford y José A. Ramírez

Dispone de tres horas para resolver los siguientes problemas. Muestre todo el procedimiento que utilice para obtener la respuesta. Justifique cuidadosamente todos los pasos. No se aceptarán reclamos sobre exámenes hechos con lápiz y los teléfonos celulares deben apagarse durante el transcurso del examen. No se permite utilizar calculadoras programables.

1. (Profesor De Ford, 30 puntos) Se tiene que A , B , y C son eventos estadísticamente independientes entre sí. Responda las siguientes preguntas justificando muy bien sus respuestas.
 - a) (4 p.) Dibuje un diagrama de Venn en el que se muestren los eventos A , B , y C .
 - b) (3 p.) ¿Son B y \bar{B} dependientes?
 - c) (3 p.) ¿Es la probabilidad $P(C|A) \times P(A|C)$ menor que $P((A \cap S) \cap (S \cup \emptyset)) \times P(C \cup \emptyset)$?
 - d) (4 p.) ¿Cuál es la probabilidad $P(S|A \cap B \cap C)$?
 - e) (8 p.) Demuestre que A y \bar{B} son eventos independientes.
 - f) (8 p.) ¿Bajo qué condición A y $A \cap B$ son eventos independientes?
2. (Profesor De Ford, 20 puntos) El país de Israel tiene un sistema llamado Iron Dome, que sirve para interceptar misiles provenientes de Gaza y otros territorios enemigos. Estos misiles siempre van dirigidos hacia alguna ciudad israelí. El periódico llamado The Jerusalem Post reportó que el sistema históricamente ha podido interceptar el 90% de los misiles enemigos. En setiembre del año pasado se lanzaron 10 misiles hacia poblaciones israelíes.
 - a) (6 p.) ¿Cuál es la probabilidad de que la población israelí haya estado totalmente a salvo, o sea, que el Iron Dome haya interceptado todos los misiles?
 - b) (7 p.) Si se hubieran lanzado 150 misiles, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que el sistema interceptara exactamente 133 misiles?
 - c) (7 p.) Se desea mejorar el desempeño del Iron Dome para que la población tenga una probabilidad mínima del 90% de estar totalmente a salvo si los enemigos vuelven a lanzar 10 misiles, ¿qué porcentaje mínimo de misiles tiene que poder interceptar el Iron Dome para alcanzar esta meta? (utilice dos decimales)

- d) (0 p.) Tome un minuto de su tiempo y agradezca que vive en un país de paz, donde la probabilidad que la población esté a salvo ante ataques aéreos con misiles es igual a 1.
3. (Profesor Ramírez, 25 pts.) Se sabe que el tiempo X (en días) que dura una tormenta tropical en un puerto es una variable exponencial con densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-(x-3)/2}u(x-3).$$

- a) (8 pts.) Si acaba de iniciar una tormenta y sabemos que seguirá por al menos 4 días, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 5 días?
- b) (8 pts.) Encuentre la probabilidad de una tormenta dure más de una semana.
- c) (9 pts.) Se estima que el próximo año habrá 5 tormentas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos sobrepasen la semana de duración?
4. (Profesor Ramírez, 25 pts.) El número de accidentes de tránsito en un mes dado en la ciudad de Palmira es una variable aleatoria gaussiana con media 65 y desviación estándar 4.

- a) (8 pts.) Calcule la probabilidad de que haya más de 70 accidentes en el mes.
- b) (8 pts.) Encuentre la probabilidad de que la cantidad de accidentes en el mes esté en el intervalo $[63, 66]$
- c) (9 pts.) Una aseguradora otorga una calificación numérica a la ciudad con base en el número de accidentes que ocurran. Si ocurren menos de 55 se otorga la calificación de 4, si ocurren entre 56 y 62 la calificación es 3, si ocurren entre 63 y 66 se otorga un 2, si ocurren entre 67 y 70 se otorga un 1 y la calificación cuando ocurren 71 o más accidentes es un 0. Si Y es la variable aleatoria que representa la calificación obtenida, deduzca una fórmula para la distribución de Y y gráfíquela.

¡Buena suerte!