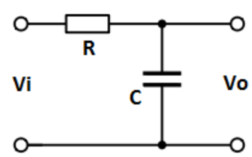
IE-0405 MODELOS PROBABILÍSTICOS DE SEÑALES Y SISTEMAS
Examen Parcial 3

I semestre 2015 Peter De Ford y José A. Ramírez

Dispone de tres horas para resolver los siguientes problemas. Muestre todo el procedimiento que utilice para obtener la respuesta. Justifique cuidadosamente todos los pasos. No se aceptarán reclamos sobre exámenes hechos con lápiz y los teléfonos celulares deben apagarse durante el transcurso del examen. No se permite utilizar calculadoras programables.

1. (Profesor De Ford, 30 puntos) Se tiene el siguiente circuito RC



Este es un sistema LTI, al cual se le aplica un voltaje de entrada $V_i(t)$ generado a partir de un proceso estacionario en sentido amplio con función de autocorrelación

$$R_{V_iV_i}(\tau) = 2e^{-4|\tau|}$$

En la salida se obtiene un voltaje de salida $V_o(t)$.

a) (5 p.) Demuestre que la función de transferencia del sistema $H(w)$ entre la entrada $V_i(t)$ y la salida $V_o(t)$ es $H(w) = 1/(1 + jwRC)$

b) (5 p.) Calcule y grafique la respuesta al impulso $h(t)$.

c) (2 p.) ¿Es el sistema realizable (causal)? Justifique.

d) (2 p.) ¿Es el sistema estable? Justifique.

e) (4 p.) Calcule el espectro de densidad de potencia $S_{V_iV_i}(w)$.

f) (7 p.) Calcule el espectro de densidad de potencia $S_{V_oV_o}(w)$.

2. (Profesor De Ford, 20 puntos) Usted es un consultor especializado en Matemática Aplicada, y le solicitaron realizar modelos matemáticos para los dos casos descritos abajo usando procesos de nacimiento y muerte en tiempo continuo. Su misión es construir para cada caso un modelo matemático, especificando el espacio de estados S, las distribuciones de probabilidad involucradas, y los parámetros Ω_i, p_i, y q_i para todo $i \in S$.

Importante tomar en cuenta. Como consultor usted sabe que para cada caso puede encontrar diversos modelos matemáticos, ya que dependen de las suposiciones que usted decida tomar (usando sentido común!) y de su imaginación para crear modelos matemáticos (siendo creativo!). Los valores de los parámetros Ω_i, p_i, y q_i no necesariamente tienen que ser numéricos, puede dejarlos en términos de otras variables definidas por usted. Justifique sus razonamientos.

Casos:

a) (10 p.) Caso I: El Ovsicori le solicitó modelar mediante un proceso de nacimiento y muerte la cantidad de temblores mayores a 4,0 en la Escala de Richter que se llevarán a cabo en suelo costarricense a partir del 1 de enero del año 2016. Adicionalmente a los requerimientos descritos arriba, especifique un vector de probabilidad inicial y comente acerca de la estabilidad del sistema.

b) (15 p.) Caso II: El MOPT le solicitó modelar mediante un proceso de nacimiento y muerte la cantidad de vehículos circulando dentro de la Rotonda de las Garantías Sociales en "hora pico" (5 p.m. a 6 p.m.) para días entre semana. Esto con el propósito de evaluar qué tan urgente es construir un puente encima de esta rotonda (similar a los que se han ido construyendo en otras rotondas de la Circunvalación). Si lo desea, puede usar el siguiente diagrama de la rotonda (cortesía de Google Maps) para desarrollar un modelo más realista (note que hay flechas que definen los carriles de entrada y salida de la rotonda).

3. (Profesor Ramírez, 25 pts.) Cada hora un servidor puede estar en uno de tres estados:

   - Estado 0 : El servidor funciona normalmente.
   - Estado 1 : El servidor está caído.
   - Estado 2 : El servidor está en mantenimiento.

   Dado que no se da mantenimiento preventivo al servidor, la matriz de transición de estados sería la siguiente:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

   a) (9 pts.) Si en un momento dado el servidor funciona normalmente, encuentre la probabilidad de que esté en mantenimiento 2 horas después.

   b) (9 pts.) Encuentre el vector de probabilidad estacionaria para la cadena.

   c) (7 pts.) Cuando el servidor funciona normalmente ejecuta en promedio 300 transacciones en una hora mientras que cuando está en mantenimiento el dato es de 150 transacciones por hora (si está caído no ejecuta nada). Encuentre el número medio de transacciones que el servidor ejecuta en una hora en el largo plazo.

4. (Profesor Ramírez, 25 pts.)

   Considere el proceso dado por

$$X(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \Theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \Theta_2)$$

   donde $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$ son constantes y Θ_1 y Θ_2 son variables aleatorias independientes, uniformes en $[0, 2\pi]$.

   a) (10 pts.) Calcule la función de autocorrelación del proceso X.

   b) (10 pts.) Si $Y(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \Theta_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \Theta_2)$, donde B_1, B_2 son nuevas constantes, calcule la correlación cruzada R_{XY}.

   c) (5 pts.) Encuentre condiciones sobre $A_1, A_2, B_1, B_2, \omega_1, \omega_2$ necesarias y suficientes para que los procesos X e Y sean ortogonales.

¡Buena suerte!