

IE-0405 MODELOS PROBABILÍSTICOS DE SEÑALES Y SISTEMAS Examen Parcial 2

I semestre 2015

Peter De Ford y José A. Ramírez

Dispone de tres horas para resolver los siguientes problemas. Muestre todo el procedimiento que utilice para obtener la respuesta. Justifique cuidadosamente todos los pasos. No se aceptarán reclamos sobre exámenes hechos con lápiz y los teléfonos celulares deben apagarse durante el transcurso del examen. No se permite utilizar calculadoras programables.

1. (Profesor De Ford, 30 puntos) Un sportsbook (o “casa de apuestas”) ofrece una plataforma web para que aficionados al fútbol puedan hacer apuestas de los resultados de partidos futuros. Para el próximo partido Real Madrid vs. Barcelona, el sportsbook determinó que la cantidad total de goles que podría hacer el Real Madrid se puede representar mediante una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = 0,4\delta(x) + 0,4\delta(x - 1) + 0,2\delta(x - 2).$$

Mientras que la cantidad total de goles que podría hacer el Barcelona se puede representar mediante una variable aleatoria Y con la siguiente función de densidad:

$$f_Y(y) = 0,25\delta(y) + 0,25\delta(y - 1) + 0,25\delta(y - 2) + 0,25\delta(y - 3);$$

asumiendo que X e Y son variables estadísticamente independientes.

- a) (4 p.) Calcule $f_X(x|X \leq 1)$.
- b) (7 p.) Grafique $f_{X,Y}(x, y)$.
- c) (4 p.) Calcule $F_Y(y|X \geq 1)$.
- d) (2 p.) El sportsbook asumió que X e Y eran independientes. Sin embargo, usted cree que en la realidad exista cierta dependencia entre la cantidad de goles que anoten los equipos? Justifique su respuesta.
- e) (4 p.) Obtenga la probabilidad de que el Real Madrid gane el partido.
- f) (7 p.) La señorita Lupe ingresa a la página web del sportsbook y apuesta a que el Real Madrid gana el partido. Dadas las reglas de apuestas establecidas por el sportsbook, si el Real Madrid es derrotado Lupe perderá \$20, si empata perderá \$4, pero si es vencedor ganará \$50. Si la variable aleatoria W representa la ganancia neta que Lupe tendrá después del partido, encuentre el valor esperado de W .

- g) (2 p.) Matemáticamente hablando, ¿es una buena idea que Lupe realice esta apuesta?
- h) (0 p.) Lea la siguiente moraleja: “Los valores esperados de ganancias netas en casinos y otros tipo de casas de apuestas usualmente son negativos, por lo que matemáticamente hablando, no es una buena idea jugar frecuentemente en estos lugares!”
2. (Profesor De Ford, 20 puntos) Una computadora toma como entrada una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{para } 2 \leq x < 4 \\ 0 & \text{para } x < 2 \text{ y } x \geq 4 \end{cases}$$

A esta le aplica una transformación para obtener una nueva variable aleatoria Y , en donde la transformación viene dada por:

$$Y = 2X - 4$$

Posteriormente, le suma a la variable aleatoria Y otra variable aleatoria Z descrita por

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq z < 0,5 \\ 0 & \text{para } z < 0 \text{ y } z \geq 0,5 \end{cases}$$

para finalmente obtener una variable $W = Y + Z$, que va a ser usada para generar números aleatorios para un juego de video.

- a) (1 p.) ¿Es $f_Z(z)$ una función de densidad válida? (en el sentido de que no viola ningún axioma de la probabilidad). Justifique su respuesta.
- b) (4 p.) Calcule $f_Y(y)$.
- c) (7 p.) Calcule $f_W(w)$.
- d) (6 p.) Basado en el teorema del límite central, calcule una función de densidad gaussiana $f_{W_{ap}}(w)$ que aproxime a $f_W(w)$.
- e) (2 p.) En una sola gráfica, dibuje las funciones $f_W(w)$ y $f_{W_{ap}}(w)$ de manera superpuesta.

3. (Profesor Ramírez, 30 pts.) Suponga que X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[a, b]$ con media igual a 1 y varianza igual a 12.
- a) (8 pts.) Encuentre a, b . Use estos valores de media y varianza en las preguntas siguientes.
 - b) (4 pts.) Encuentre $E[(1 + X)^2]$.
 - c) (4 pts.) Calcule la desviación estándar de $5 + 3X$.
 - d) (4 pts.) Sea $Y = 2 - 2X$. Calcule la covarianza entre X e Y .
 - e) (4 pts.) Encuentre el coeficiente de correlación entre X e Y .
 - f) (6 pts.) Calcule la función generadora de momentos de Y . (Puede dejar el resultado expresado en términos de a y b)
4. (Profesor Ramírez, 20 pts.) Se sabe que el voltaje V en una resistencia eléctrica es una variable aleatoria con densidad de probabilidad dada por

$$f_V(v) = \frac{1}{2}e^{-|v|}.$$

La potencia asociada es $P = V^2$. Tal potencia expresada en decibeles tiene la forma

$$L = 10 \log_{10}(P) = 10 \frac{\ln(P)}{\ln(10)}.$$

- a) (10 pts.) Encuentre la función de densidad de probabilidad para L .
- b) (10 pts.) Encuentre la función de distribución de probabilidad de L .

¡Buena suerte!